**5.1 从傅里叶系列到傅里叶变换** 2021年4月8日10点31分

考虑区间上函数的傅里叶级数展开,

第次谐波频率为,其中傅立叶分量的区间为.将它们代入上面的表达式中,我们有

我们对傅立叶级数的行为感兴趣,因为的周期增加到极限情况,其中是非周期性的,或,,如果您愿意,它仅包含一个从延伸到的“周期”.随着的增加,傅立叶级数的离散频谱线更靠近在一起(图5.1).线间距变为无穷小,频谱线频率变为连续频率变量,总和成为黎曼积分:

傅立叶系数的序列已成为函数.取到的内部积分称为正向傅里叶变换,取到的外部积分称为逆傅里叶变换.

与傅立叶族的其他三个成员一样,正向变换在复指数中带有负号,而逆向变换则带有正号.我们可以用或紧凑地表达正向变换,而用或紧凑地表达逆变换.表示和是傅立叶变换对:是的正向变换,是的逆变换.

通过类似的启发式过程,我们可以从离散时间傅立叶变换中获得傅立叶变换.这将暗示两者之间的联系,下一章将对此进行严格的说明.以下列公式开始

令且(回想一下示例3.1中的讨论).随着变小(采样变得更精细),数字频率范围映射到模拟频率不断增加的范围,趋向于,因为变为无穷小.傅立叶变换的单个周期成为整个实线上的频谱.在逆变换中,变为无穷小,时间点聚集在一起成为连续的,样本融合在一起成为函数:

同样,我们处于傅立叶变换对.(邀请您制作类似于图5.1的草图以说明这种非正式解释.)

傅立叶变换在文献中也以其他两种形式出现:

且

其中,使用频率变量(角频率,弧度/秒)而不是,其单位是每秒循环数(赫兹).两者之间的关系为.当是空间变量时,频率具有每单位距离的周期单位,例如,cycles/mm.人们可能还会看到傅立叶内核写为,其中,傅立叶分量的周期被称为波长.公式5.2和5.3之间的差异在于因子的分布,这对应于,傅立叶级数和离散时间傅立叶变换.

**5.2 基础属性和一些示例** 2021年4月8日11点47分

如果绝对可积,则对所有存在傅立叶变换积分:

如果,则它的傅里叶变换是有界的,并且该界是的范数——.可以证明傅立叶变换是频率的连续函数.如果至少是分段连续的并且是绝对可积的,则继承复数指数的连续性.此外,可以证明随(黎曼–勒贝格引理).

定理5.1(中的傅立叶变换) 设.则它的傅立叶变换

作为普通积分存在,在所有上有界且连续,并且随.此外,如果,则逆变换是普通积分:

并且它在上是有界且连续的.

**5.3 傅里叶变换定理** 2021年4月8日14点10分

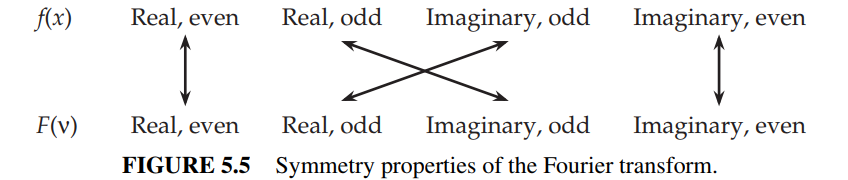
线性

傅里叶变换是一个积分,并且积分是线性运算:和.因此,我们有

定理5.2(线性) 令和,并令为常数.则

**对称性**

傅立叶变换遵循与其他变换相同的对称性(图5.5).



定理5.3(对称性) 令.则(相应的逆命题也成立)

如果f是实数，则F是Hermitian：F（𝜈）= F ∗（− 𝜈）。

如果f是偶数（奇数），则F是偶数（奇数）。

如果f是实数和偶数（实数和奇数），则F是实数和偶数（虚数和奇数）.

定理5.4(逆向) 令.则,

定理5.5(重复变换) 令.则,或者等效地,.

Parseval公式

我们知道如果,那么是有界的.此外,如果,那么.也就是说,有界且绝对可积分的函数也是平方可积分的,因为

对称地,如果,则逆变换是一个普通积分,并且是有界的并且是绝对可积分的,因此.我们现在在内积空间中操作,Parseval的定理说,傅立叶变换保留了内积和范数.

定理5.6(Parseval公式) 令,其中且.则

移位定理

对于函数,位移是沿轴的平移.

定理5.7(移位) 令.令表示沿轴的平移,而表示沿轴的平移.则

移位不会影响傅立叶变换的大小:

频移定理的频域形式(方程5.20)通常表示为

这称为**调制[modulation]定理**.

膨胀定理

缩放函数中的自变量,即或,沿轴拉伸或压缩函数.这称为膨胀.

定理5.8(膨胀) 如果且为非零常数,则

移位和膨胀通常同时发生.的傅立叶变换为

通过相继应用移位和扩张定理,可以得出相同的结果:

定理的这种组合正确地将解释为到的扩张,然后将其沿移位.因此,要变换函数,请以相反的顺序应用定理-先移位,然后扩张.如果您首先应用扩张定理,则可以得到

或

两者都不正确.

微分与积分

如果一个函数是可微的或可积分的,则有一些方便的表达式可用于导数或积分的变换.

定理5.9(导数) 如果是可积的(例如或)且,则

如果一个函数是次可微且所有导数都是可积的,则导数定理可以应用次,因此

如果是可积分的,则对同一主题的变体是

例题5.11 解二阶常微分方程

例题5.12 计算高斯函数的傅里叶变换

例题5.13 (线性啁啾函数) 需要看懂

定理5.10(积分). 令是可积的且,且.则

如果是可积的,则逆关系也成立.

例题5.14(双二阶滤波器) 需要看懂

矩定理

函数的第n阶矩,记为定义为

其中积分存在(f的衰减速度必须快于随).在应用程序中经常遇到的两个矩是函数下的面积和质心

方差测量函数的宽度或扩散.它基于关于质心的函数的第二个矩,也称为第二个中心矩:

可以从函数的傅立叶变换的导数计算函数的矩.以下定理证明了基本方法,该定理反映了之前的结果,定理3.4和4.8.

定理5.11(面积) 如果在原点连续且,则

假设积分都存在.

定理5.12(矩) 如果,则

当积分存在并且导数在原点连续时.

例题5.15 从图像上分析各阶矩的意义

5.4 傅里叶变换的意义 2021年4月8日16点27分

如果对于某些函数,我们能够计算傅立叶变换,则可以非正式地将该变换解释为一组基函数的傅立叶系数,这些基函数不由整数而是由实变量索引.但是,这种解释不太有效. 该“连续基”的正交关系显然将由内积积分表示

但是复指数在无限极限上不是绝对可积的.特别地,当时,积分会爆炸.此外,在具有线谱的DFT和傅立叶级数中,很容易将每个系数与信号在相应频率下的函数相关联.对于傅立叶变换,这种解释失败了.如果它是正确的,我们可以说,例如,和是频率为时正弦曲线的系数,是构成原始函数的众多系数之一.例如,这意味着的傅立叶变换为

但是在傅里叶逆变换中,被积将为

并且积分是两个孤立点下的面积,该面积为零,这不是我们想要的.如果我们尝试计算的傅立叶变换积分,那么我们做得不会更好,因为余弦在上不是绝对可积或平方可积.具有讽刺意味的是,正弦波是一种函数类型，如果没有特殊处理，就无法进行傅立叶变换.这是下一章的主题.

那么傅立叶变换怎么说呢？最物理的方法是将其视为密度函数,类似于经典质量密度,统计概率密度函数或量子概率幅度.如果细棒具有密度函数,则无法说出在特定点处的质量,因为单个点是无质量的.但是,您可以通过对整个杆的长度上的密度函数进行积分来计算整个杆的质量,并且可以通过对杆的一部分上的密度函数进行积分来计算杆的一部分的质量.

傅立叶变换也是如此.稍后我们将看到,如果,那么也是如此,Parseval公式（公式5.18b）表示,中的总功率是频谱在所有频率上的积分:

如果将平方范数解释为功率,则傅立叶变换的平方幅度包含功率/频率或“每单位带宽的功率”的单位.频带内的功率是频谱的一部分的积分:

点(令)下的面积为零,因此我们必须得出结论,单个频率下的功率为零.这不会造成任何实际问题,因为用于频谱分析的仪器具有有限的观察带宽.

5.5 卷积 2021年4月12日14点47分

5.5.1 定义和基础属性

两个函数和的卷积,定义为:

当积分存在时.通过改变变量可以容易地验证两个积分的等价性,表明卷积是可交换的,.

在特殊情况下,对于在有界区间之外的所有,(然后称该函数具有有界支持),当f和h有界时:

卷积是一个有限积分且有界.

如果f和h是单侧的,对于等于零,那么卷积是一个有限积分,如果对于f或h没有额外的约束则不保证在下有界.

让我们开始像对待傅立叶变换一样,先考虑有界卷积的要求:

如果其中一个是有界的,另一个是绝对可积的,则乘积fh是绝对可积的:

移位我们有结果

还可以证明,在相同的条件下,和,即使或一个或两个是不连续的,卷积也是的连续函数.

卷积对函数有扩大的影响.在示例5.16和5.17中,卷积的结果比矩形宽.如果两个函数f和g分别在有限区间和上得到支持,那么它们的卷积在间隔上得到支持. 该区间的宽度是,分别是和的支撑宽度之和.对于具有有界支持或无界支持的函数,在卷积下添加质心和方差也确实是这样,即,

当矩存在时.

在示例5.18中,尽管卷积将阶跃函数的正方形边缘加宽为逐渐增大的值,但是这些宽度度量不适用,因为阶跃函数具有无穷大的支持并且没有有限的质心或方差.

卷积的傅立叶变换在系统理论中至关重要.为此,我们需要卷积是绝对可积的.的范数是

因此,如果,则.

**5.5.2 卷积和线性系统** 2021年4月12日15点53分——2021年4月27日10点00分

系统可以抽象地视为将输入函数的空间映射到输出函数的空间的运算符.对于输入和输出,我们写.

**定义5.1(线性,时不变,因果系统)**.

1. 如果，则系统是**线性的**,其中,,和是常数.
2. 如果,则系统是**时不变**(或位移不变).也就是说,将输入平移量只会使输出平移相同的量.
3. 如果对于所有在时为零的输入,对于而言,输出也是零,则系统是**因果**的.

在本节中,我们探讨线性,时不变(LTI)系统与卷积之间的关系.首先考虑由微分方程描述的一阶LTI系统(例如RC电路)

其中称为系统的**时间常数**.该系统是LTI（任何由具有常数系数的线性常微分方程描述的系统都是LTI）.假设驱动函数为高度和宽度的矩形脉冲,,并且令初始值.在时,电容器根据众所周知的“饱和指数”曲线充电:

当时,得到值.这时,输入断开,电容器开始放电,跟随着衰减的指数.完整的输出由函数描述

该函数如图5.15所示.随着的增加,驱动脉冲的幅度增加,但是电容器充电的时间减少.当变得非常大时,脉冲持续时间与系统时间常数相比非常短;充电似乎几乎是瞬时的,而响应似乎是全部放电.脉冲的精确宽度可以忽略不计,我们可以使用通过让创建的理想化模型,从而获得

这种短暂的,强烈的激励被认为是脉冲.响应于脉冲输入的线性系统的输出称为脉冲响应,通常表示为.

现在考虑LTI系统对任意输入的响应.假设输入至少是分段连续的(实际上,输入是有界且可积分的()就足够了,但是实际信号始终是分段连续的或更好的,这种假设简化了数学.)可以通过一系列矩形脉冲任意近似地近似：

包括因子,使得在的极限中,和近似具有相同的面积.通过线性,系统的响应通过其对矩形脉冲的响应的叠加来近似,我们将其表示为.脉冲响应是平移不变的.系统的输出是

定义.在极限情况下,当时,这是一个经典的黎曼和,可以求积分:

系统输出是输入与脉冲响应的卷积.

卷积模型既适用于空间系统,也适用于时间系统.点光源的图像是成像系统的空间脉冲响应或点扩散函数.任意(“扩展”)对象的图像是点扩散函数的叠加,理想几何图像中的每个点都对应一个.结果是点扩散函数与理想图像的卷积;图像模糊是宽点扩展功能的结果.以类似的方式,响应于点施加的热量在材料中的温度分布也是空间脉冲响应,响应于点载荷的结构变形也是如此.

一个系统可以是线性的,但不是时间(或空间)不变的.如果在时间施加了脉冲,则在时间处测得的响应通常可能取决于和以及在脉冲和测量之间经过的时间.时变脉冲响应通常表示为或.空间变异系统的一个示例是照相机,它在像场的中心比在边缘的聚焦更清晰.另一方面,时不变系统对时间𝜏的脉冲的响应仅取决于经过的时间(图5.16).

在时间系统中,因果关系将脉冲响应限制为单边,.但是,自变量为的空间系统不受因果关系的限制.理想情况下,光学系统的点扩散函数是关于几何像点对称分布的.

用卷积积分计算LTI系统对频率的复指数的响应:

输出是相同频率的复数指数乘以复数因子,即传递函数.用运算符表示,可以表示为:

系统以复杂指数运行的结果只是简单地按复数H（H）进行缩放。频率的复指数是线性时不变系统的本征函数，传递函数H（H）的值是相应的本征值。对于任意输入，卷积定理（公式5.40）为LTI系统提供了时域和频域之间的链接。 LTI系统的输出是输入与系统的脉冲响应的卷积，g = h ∗ f；输出的傅立叶变换为G = HF。系统的传递函数（频率响应）H（𝜈）是冲激响应的傅立叶变换。我们可以将LTI系统在频域中的操作解释为（1）将输入进行傅立叶分解为复杂指数，这是系统的本征函数，（2）通过传递函数对傅立叶分量进行加权，以及（3）傅立叶合成以重建输出（图5.17）。

**5.5.3 相关性** 2021年4月12日16点09分——2021年4月27日11点25分

卷积的近亲是相关性,定义为:

有时也称为互相关,以将其与称为自相关的特殊情况区别开来.变量𝜏称为相关**滞后**.当时,相关性具有和的内积形式,因此如果,则.

相关性可以写为卷积:

其中表示f的时间反转.这导致傅立叶表示:

**定理5.13(相关性)** 令和.则,

(a)互相关

(b)自相关

对于函数和,使得存在相关性.

**5.6关于傅里叶变换的更多信息** 2021年4月27日11点43分

在本节中,我们将讨论傅立叶变换的数学理论的其他方面:

1. 为绝对可积函数定义逆傅立叶变换,并了解其性质.问题将使人联想起傅立叶级数的收敛性质.
2. 为平方可积函数定义傅立叶变换(和逆变换),该函数描述许多物理信号.
3. 扩展卷积的定义和卷积定理以包括平方可积函数.

**5.6.1 中的傅立叶逆** 2021年4月27日11点45分

当一个函数是绝对可积的时,它具有一个由普通积分定义的傅立叶变换.该变换是有界且连续的,并且在高频下渐近接近零.如果函数足够平滑,则其傅立叶变换会迅速下降到足以完全可积分,并且傅立叶逆变换作为普通的,绝对收敛的积分存在.在上一章中,我们发现例如方波的某些傅里叶级数,其系数衰减得太慢而无法进行绝对收敛,仍然可以具有部分和的收敛序列.因此,对于傅立叶变换,我们期望即使不是绝对可积的(例如),尽管它可能具有较差的收敛特性，但仍然应该有一个逆.理想情况下,我们应该在某种意义上发现.

让我们假设我们对F的全部了解是它是绝对可积函数的傅立叶变换.在最坏的情况下,积分不能作为普通积分计算(即,即使我们找到被积的反导数,积分也会在无穷大处发散).我们可以通过将F与另一个函数(称为**收敛因子**)相乘,创建一个函数序列来使积分收敛:

收敛因子被设计为以迅速下降,以驯服的不良渐近行为,随着,从而使.每个可积并且可以逆变换到函数.当增加且时,逆序列也应接近极限,我们将其定义为F的傅立叶逆变换.此过程有时称为**极限中的变换**.

两个常见的收敛因子是高斯,

和矩形函数,

这些函数中的每一个都在中,并且随着接近1.利用高斯和矩形收敛因子,可以建立以下结果.

**定理5.14(在L1的极限变换)** 令和为其傅里叶变换.令,

1. 积分

随在范数中收敛到:

(b)如果同样是分段连续的,则积分

随收敛到.如果是连续的,则一致收敛到.

(c)如果同样是分段光滑的,则积分

随收敛到.如果是连续的,则一致收敛到.

这是论点的要点.在逆傅立叶变换计算中包括收敛因子,我们有

利用富比尼定理,

然后是位移和膨胀定理,

其中是的傅立叶逆变换.首先考虑高斯收敛因子,因此

高斯保持单位面积（将面积定理应用于收敛因子），同时随着的增加而变高()和变窄().卷积是的局部平滑或平均,它使在处的峰周围的值具有更大的权重.随着的增加,平均取的逐渐变窄的部分,以使越来越紧密地跟踪,并使范数收敛到零.

如果另外(至少)是分段连续的,则逐点收敛到,除了在中的跳跃不连续点处.在那里,内核跨越了跳转;其一半的面积由加权,另一半的面积由加权.结果,在跳变时收敛到和的平均值(我们定义了矩形函数,并且在跳变时单边指数为,与此逆结果一致).更好的是,如果是连续的,则逐点收敛到.高斯因子逆变换的收敛示例如图5.18所示.

(c)部分的简单截断类似于傅立叶级数的部分和(参见定理4.2),并给出

随着的增加,该卷积核也变得越来越高,同时保持了单位面积.因为矩形是不连续的,所以对于大x而言,其变换的衰减速度不如高斯衰减快.收敛的条件更为严格,并且的振荡特性将导致的跃变不连续周围的过冲.极限过程的变换如图5.19所示.

**5.6.2 中的傅立叶变换** 2021年4月12日16点25分——2021年4月27日14点07分

我们还希望为平方可积的函数定义好傅里叶变换,因为现实的物理函数具有有限的能量.当我们处理傅立叶级数时,我们的函数被限制在有界的区间内,例如[-𝜋,𝜋]或[0,L],函数空间是嵌套的,.平方可积函数也是绝对可积的,并保证具有傅立叶系数.

当我们进入无界区间时,我们已经看到一个有界且绝对可积的函数也是平方可积().还可以证明,连续且绝对可积分的函数也必须有界(),因此绝对可积分和连续的函数也是平方可积分().但是,一般来讲,这些空间并不只是嵌套的.例如,

属于,和.

属于,但不属于和.

sinc x和1

1 + i2𝜋𝜈属于L2（ℝ）和L∞（ℝ），但不属于L1（ℝ）。

阶跃函数U（x）和常数函数1属于L∞（ℝ），但不属于L1（ℝ）或L2（ℝ）。

平方可积函数通常比绝对可积函数随衰减得更慢.(将L2中的sinc与L1中的sinc2比较).因此,如果是平方可积但不是绝对可积,则其傅里叶变换不能定义为普通积分.

将傅立叶变换从扩展到的细节可以在几个地方找到.下面的定理与先前为（定理5.14）所示的定理之间的主要区别是,在中,正向变换和逆向变换均已定义为序列的极限.

**定理5.15(中的傅立叶变换)** 设,.

(a)函数序列

随收敛,在范数上逐点收敛到函数,是的傅里叶变换.逆变换类似地由一系列函数定义:

(b)如果也是分段连续的,则傅立叶逆变换随逐点收敛到.如果是连续的,则一致收敛到.

函数序列

随收敛,在范数上(逐点)收敛到函数成为的傅立叶变换.逆变换类似地由序列定义

早期开发的其他傅立叶变换定理继续适用于定义.例如,对于移位定理,

而且,当然,我们有Parseval公式，该公式表明傅里叶变换是从到的范数保留映射.

这两个定理(5.14和5.15)都提供了傅立叶变换的一致,收敛的定义,但没有用于评估它们的万无一失的方法.在实践中,使用或不使用收敛因子来评估特定变换可能是不可能的.但是,如果该方法失败了,那将是因为缺少抗导数,而不是因为被积物从根本上是不可积的.某些其他限制程序(例如稍后在第8章中介绍的那些限制程序)可能会达到目的.

**5.6.3有关卷积的更多信息** 2021年4月12日16点44分——2021年4月27日14点54分

通过对和进行傅立叶变换,我们可以扩展卷积和积定理的初始陈述(方程5.40和5.41).

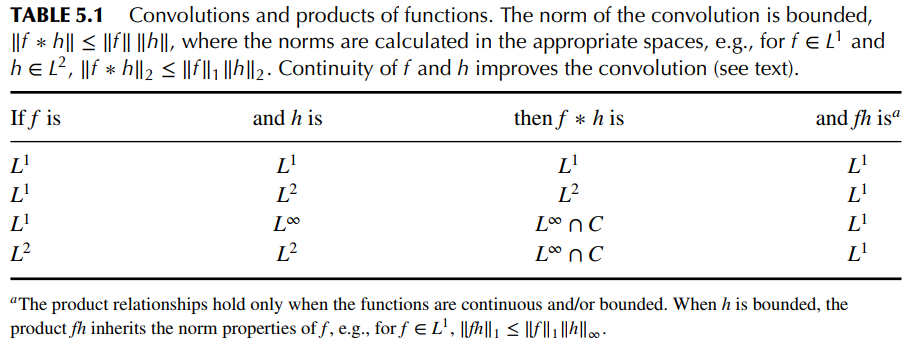
**定理5.16(和的卷积定理)** 令和.

如果,则.另外,如果,则.

如果,则.

如果,,则中.

在表5.1.12中列出了卷积和,和中的函数乘积的更完整的属性集,而没有证明.卷积和乘积的界适用于有界和无界区间上的函数,也适用于序列(用和代替积分).上一章的结果(表4.2和4.3)是特殊情况.



实际上,除了它们具有的可积性之外,我们通常还具有至少分段连续的函数,这改善了卷积的属性.例如,绝对可积分和连续的函数也是有界和平方可积分的.该函数与另一个绝对可积函数的卷积也是有界的,连续的以及绝对可积的.

**5.7 时间带宽关系** 2021年4月12日16点47分——2021年4月27日16点20分

膨胀定理告诉我们,随着函数的压缩,其傅立叶变换得到扩展,反之亦然.我们可以通过定义函数的宽度度量并观察它们在时域和频域中的行为来量化这种关系.

**等效宽度**

简单地将函数的等效宽度定义为具有与相同的高度和相同的面积的矩形的宽度:

这个想法如图5.20所示.该定义要求的最大值位于原点.如果不是这种情况,则可以移动函数,使其最大值位于原点.如果函数具有多个峰,则等效宽度没有意义.

傅立叶变换的等效宽度F可以用类似的方式计算:

根据面积定理,且,所以我们有

与的特定形式无关的结果.

**均方根宽度和不确定性原理**

宽度的第二个度量是基于方差而不是面积.函数f的均方宽度定义为其平方大小的方差.傅里叶变换的均方宽度类似地定义为.对于没有合理等效宽度的函数(包括振荡波包),此度量给出了有意义的结果.和的均方宽度成反比,如期望那样,但比等效宽度的情况更复杂.结果表示为一个定理.它的证明是傅立叶定理和范数计算的一环.

**定理5.17(不确定性原理)** 令,则均方根宽度和服从不等式

**5.8 计算傅立叶变换** 2021年4月12日16点51分——2021年4月27日16点52分

当积分无法解析地完成或无法在变换对表中查找时,傅里叶变换的数值计算是适当的.数值分析教材中介绍了用于计算集成的一般方法.数学软件包中提供了许多算法(例如,Matlab中的quad8函数)。.尽管细节有所不同,但所有数值积分方法都基于有限和来近似积分.图5.21显示了一个由N个矩形面积之和近似的积分.

第个矩形的高度为,宽度为.积分的近似值为

随着矩形的变窄和矩形数的增加,近似值会提高.使用梯形而不是矩形的更复杂的积分方法,以及对样本网格的自适应调整,以更高的计算量为代价实现了更高的精度.

傅立叶变换的矩形近似为

其中区间的选择使得对于,可接受地接近零,并且是采样间隔.的每个值都需要函数求值和相乘;在采样间隔为的个值处计算需要进行运算.将总和转换为离散傅立叶变换的形式,使用FFT算法可以得到的复杂度.

**正向变换**

我们从前向傅立叶变换的矩形近似开始,使用均匀的采样网格,:

选择采样间隔足够小以避免走样,也就是说,使得被有效地限制为.复指数在中是周期性的,周期为.因此,近似和也具有周期,并且在一个周期上对其进行评估就足够了.(对于高于的频率,计算出的傅立叶频谱不会提供有关f的新信息.)

在频率范围上施加具有个采样点的均匀采样网格:

频域中的分辨率为.应该使它足够小(通过选择足够大的M)以显示F的精细特征.进行这些替换后,近似总和为

接下来,将总和截断为有限数量的项.我们将考虑两种情况:

是单侧的,例如.

是双面的,例如.

**情况1:是单面的**

选择一个足够大的最大值X,使得当时.已经选择了以避免走样,这会将样本数固定为.截断的总和表示为:

使和成为DFT的关键步骤是设置,因此向量和具有相同数量的样本:

对于正频率分量,到,.负频率分量,从到,从DFT的隐式周期获得的,.

就是说,在计算了DFT之后,在DFT矢量的前半部分发现了的正频率分量,在后半部分发现了负频率分量.DFT循环移位个样本(图3.9)将使值按适当的顺序排列.在Matlab中,循环移位是由fftshift函数执行的(但请参阅替代方法中的问题).整个傅里叶变换计算由代码实现

Fv = fftshift(fft(fn)) \* dx,

其中fn是样本的向量,dx是采样区间,Fv是近似向量.

情况2:f是双面的

选择一个足够大的最大值X,使得当时.近似总和的范围是从到而不是从到:

同样,我们取M = N使总和看起来像DFT.该总和被分为两个较小的总和,跨越负数和非负数索引:

在第一个总和中,变换索引:

因此,我们有

这是向量的DFT

这是向量的循环移位

为了将放在DFT输入向量的第一个位置,必须进行循环移位.在Matlab中,移位是通过ifftshift函数执行的(但请参见其他方法的问题).一旦计算出DFT,就以与单侧情况相同的方式处理负频率指数.结果是

用于此计算的Matlab代码为

其中fn是样本的向量（f（nΔx））N ∕ 2-1 − n = -N ∕ 2，dx是采样间隔Δx，Fv是近似向量（F̂（mΔ𝜈））N ∕ 2-1 m = -N ∕ 2。 图5.22中说明了已知变换对rect x⟷sinc 𝜈的过程。 在此特定示例中，| 𝜈 |的近似值 > 3很差。 导致此错误的原因是混叠，这是由采样间隔Δx不足引起的.

好的结果由合适的采样参数和确定,它们不是独立地选择,而是成对的:

当f是时间的函数时,数量XW被称为时间带宽积;当f是空间变量的函数时，数量XW被称为空间带宽积.这些关系如图5.23所示.

实际上,应该是2的幂才能充分利用FFT.选择宽度以避免截断错误.可以迭代地找到正确的采样间隔.如果近似变换在高频下接近于零,则可能足够小.如果对此有疑问,则将除以一半并重复计算.的任何明显差异是由于混叠误差引起的,表明的值越小越好.将减半的过程应重复进行,直到不再变化为止.然后可以检查频率分辨率.如果频谱特征(例如峰)似乎已被充分分辨,则可能足够小.如果有疑问,请通过将N加倍来减小并重复计算.的明显差异是由于截断误差造成的,并表明较小的值(相应地,较大的值)更好.应重复将加倍的过程,直到的外观令人满意为止.

**逆变换**

傅立叶逆变换的DFT近似推导遵循相同的步骤,最终导致

我们假设傅立叶变换是两侧的,并将向量循环移位到向量:

在许多情况下,是Hermitian,这意味着是实数.因此,为了保证逆DFT 是实数,必须是厄米(Hermitian).可以证明,这要求是实数.然而,通常,是复数,因此当为Hermitian时,应将的值设置为的实部.该操作也可以解释为平均和,这导致虚部消除.

将F转换为F c时,总和具有DFT的形式:

如果已知f为单侧，则f（nΔx）≈fc [n] ∕Δx。 否则，如果f为两侧，则执行最后的循环移位。 最终结果是

在Matlab功能方面，

其中Fm包含样本（F（mΔ𝜈））N ∕ 2-1-1 m = -N ∕ 2，dx是采样间隔Δx，fx是近似逆变换值（f̂（nΔx））的向量。 图5.24中说明了另一个已知的变换对的过程，此处将其解释为脉冲响应和传递函数：

带宽参数B =10。频率采样间隔Δ𝜈 = 2使时间宽度T = 1 ∕ Δ𝜈 = 0.5大到足以捕获整个脉冲响应而不会被截断。 时间采样间隔为Δt= 1 256≈0.004，因此选择N为2的幂（128），并且W足够大（256），使得H基本上以zero =±W 2达到零。 在近似的脉冲响应中，恰好在t = 0之前，仍然可以看到由于截断H而产生的轻微误差。

卷积

使用卷积定理f \* g⟷FG，可以在频域中计算两个函数的卷积。 计算上，该过程是计算变换F和G，将它们相乘，然后计算逆变换。 不可忘记，DFT正在用于近似傅立叶变换，并且DFT的卷积定理是f⊛g⟷FG － FG的逆DFT是向量f和g的循环卷积。 为了证明循环和非循环（线性）卷积之间的关键区别，请考虑图5.25所示的两个长度为N = 32的单边序列。 它们的线性卷积由以下关系式计算

要注意的关键特征是f ∗ h的长度为2N − 1 = 63点（比较ℝ上的函数结果，即volution的宽度在卷积下求和）。 相同的两个序列的循环卷积如图5.26所示：

其中位移n-k取模N。 循环卷积只有N = 32个点长，很容易证明它是线性卷积的周期副本的总和，即，

图5.25和5.26中两个卷积之间观察到的差异是由f \* h的重叠副本引起的。

简单地对两个函数f和h进行采样，将它们的DFT相乘，然后计算乘积的逆DFT，就不会产生所需的线性卷积f ∗ h。 线性卷积太长，无法容纳循环卷积可用的空间。 该问题的解决方案是通过向向量f和h分别添加N个零，即零填充，为线性卷积的额外样本腾出空间。 零填充向量fp定义为：

对于hp同样如此。 循环卷积fp⊛hp如图5.27所示。 消除了重叠误差，并且从循环卷积获得了线性卷积。 这样就可以利用FFT算法利用DFT计算线性卷积。 该过程如图5.28所示，其中矩形脉冲通过公式5.56所示的传递函数进行滤波。 选择采样参数Δt和Δ𝜈以及样本数N，以满足许多标准。 脉冲的宽度为0.125，先前的脉冲响应计算表明其宽度约为0.2。 卷积的宽度将约为0.325。 输入和脉冲响应至少应填充此长度，这是第一个要求：

但是Δ𝜈 = 1 ∕NΔt（公式5.8），因此

对于𝜈≥100，传递函数的大小小于0.01，因此对频域宽度W = NΔ𝜈的合理约束为

由于Δt= 1 ∕ NΔ𝜈，因此这对时域采样间隔Δt施加了约束：

Δt的选择还决定了输出中的特征的分辨能力。对于Δt= 0.005，在整个输出脉冲轮廓上将有大约0.325×0.005≈65个采样点。最后，我们对点数N进行了约束，为了提高计算效率，该点应为2的幂。使用Δt= 0.005和Δ𝜈 = 3得出N = 1 ∕ 0.015≈67。舍入到N = 64将导致NΔt= 64×0.005 = 0.32，这小于预期的宽度0.325，因此可能导致重叠误差。图5.28说明了Δt= 0.0125，Δ= 1和N = 128的计算步骤顺序，这些值被选择来制作直观的图形。图5.29比较了依次减小的Δt和较大的N的结果。使用相对较大的Δt= 0.02会截断and = 25处的传递函数和脉冲谱，并在卷积中引起相当大的振荡伪影。将Δt减小至建议值0.005可以消除这些错误，但是N = 64会截断输出，并且正如预期的那样，由于零填充不足而在负尾部会导致伪影。将N增加到128可消除伪影，并使脉冲的正尾部清晰可见。继续减小Δt并增加N并不能解决脉冲的任何其他特征，但会显示出更平滑的图形。

在时域还是在频域中计算卷积的实际决定取决于相对的计算成本。要通过直接求和对长度为N的两个实值向量进行卷积，需要进行N2个乘法加法运算。为了使用FFT执行相同的操作，需要将矢量零填充到2N。然后，每个向量的DFT需要2N log2 2N复数运算。将DFT相乘需要2N个复数乘法，执行逆DFT会再加上2N个log2 2N个运算，总共需要2N + 6N个log2 2N个复数运算。复数乘法运算使用四个实数乘法，这会将总数乘以四。另一方面，如果卷积的函数是实际值，则可能会有一些减少。如果要将一个脉冲响应应用于多个输入，则可以预先计算和存储传递函数，从而节省了DFT步骤。使用2N + 6N log2 2N = 8N + 6N log2 N作为频域卷积运算计数的合理估计，当8N + 6N log2 N <N2时，即当N为2的幂且N≥64。

在卷积的许多实际应用中，输入f是实时采集的样本流，而脉冲响应h具有固定长度。 目前的傅里叶方法不能在这里应用，但是存在频域卷积的改编，允许对f进行分段处理。 专用数字硬件还可以通过直接求和快速计算卷积。 使用哪种方法取决于可用硬件的功能以及对特定问题的操作计数的仔细分析。

5.9时频变换 2021年4月12日17点30分

傅里叶变换可以理解为函数f在一组复杂的指数基函数{ei2𝜋𝜈x}上的投影，这些函数在从x =-∞到+∞的整个实轴上延伸。 傅立叶基函数的无限范围具有一个缺点，因为傅立叶变换不提供有关函数的频率内容随时间的任何变化的信息。 换句话说，傅立叶变换不能及时定位信号的频率内容。 能够进行时频定位的变换在信号处理中15以及正在进行的研究课题中都很重要。 在这个简短的部分中，我们将介绍该问题和两个流行的解决方案：短时傅立叶变换和小波变换。

短时傅立叶变换

考虑信号f（t）= U（t）ei2𝜋bt，这是一个在t = 0时打开的正弦曲线。使用调制定理和下一章的结果（公式6.38）可以轻松计算出该信号的傅立叶变换：

如图5.30所示，该幅值正确地给出了一个峰（实际上是一个奇异点），即𝜈 = b，但未传达任何有关发作时间的信息。 对于在t = t0处的任意起点，我们可以获得的最大相位项e-i2𝜋𝜈t0，其幅度消失了。

在计算傅立叶变换之前，我们可以通过使用窗口隔离信号的一部分来获得一些时间定位。 在这里，我们将使用一个矩形窗口，该窗口的宽度为a，高度为1 ∕ a（单位面积），以t = u为中心。 现在，变换是窗口位置和频率的函数：

我们确定了三种执行计算的方式：u <−a ∕ 2，其中窗口在步骤的左侧，结果为零； −a ∕ 2 <u <a ∕ 2，其中窗口在t = 0处跨过跳转，而u> a ∕ 2，其中矩形在跳转的右侧。 集成非常简单。 对于−a ∕ 2 <u <a ∕ 2，

取平方的平方，我们有

显示此开窗傅立叶变换的一种有用方法是，在一个轴上以相对于频率𝜈的亮度（或暗度）与频率as的关系显示功率谱的值，而在另一根轴上显示窗口的位置u。这通常称为频谱图（图5.31）。与傅立叶变换（5.57）不同，频谱图揭示了正弦曲线的时间起点。在u = −a ∕ 2之前，变换为零，而在u = a ∕ 2之后，则是一个以𝜈 = b为中心的宽度为2 ∕ a的正弦。从完全关闭到完全打开的过渡宽度为a。在过渡区内，矩形窗口与阶跃的重叠从零增加到a，在该重叠处我们积分以计算傅立叶变换。相应地，sinc谱的宽度从无穷大（在u = -a ∕ 2处）减小到2 ∕ a（在u = a ∕ 2处）。该窗口既确定频谱峰值的宽度，又确定我们定位信号起始点的能力。根据膨胀定理和不确定性原理，这些特征宽度是成反比的。使窗口变窄可改善开始位置，但会扩大频谱，这使解析紧密间隔的频率分量变得更加复杂。加宽窗口会加宽频谱峰值，提高频率分辨率，但会增加从关闭到打开的过渡，这使得识别信号开始时间或区分几乎同时发生的两个信号变得更加困难。

我们将通过另一个示例（示例5.9中引入的复线性线性调频信号）进一步探讨这些思想：

线性调频脉冲的瞬时频率为b | x |。 可以认为是频率呈线性增加的正弦曲线。 理想情况下，我们希望通过傅立叶变换来揭示这种变化，例如，以𝜈 = bx为中心的峰。 但是傅立叶变换没有提供这种定位。 确实，的傅立叶变换早先被认为是（等式5.30）

线性调频脉冲及其变换如图5.32所示。 正如我们对步进正弦波所做的那样，获取有关线性调频信号的局部频率信息的一种直观方法是通过以x = u为中心的观察窗view查看该函数。 在这里，高斯窗在分析上很方便，𝑤（x-u）= √ae-𝜋a（x-u）2。 窗口的宽度（在1 ∕ e点之间）为2 ∕ √𝜋a，并标准化为具有单位面积。 短时傅立叶变换是

（如果将a设置为零，则可以自己检查公式5.30是否已恢复。）与以前一样，为了解释该结果，我们将通过计算平方幅度（功率谱）来去除相位因子：

这是一个高斯，以center = bu为中心，,的瞬时频率在x = u处（图5.33）。

频谱图| F（𝜈; u）| 2绘制在图5.34中。光谱宽度（在高斯分布的1 ∕ e点之间测量）为Δ𝜈 =√2a∕ 𝜋√1+（b ∕ a）2。同样，这与窗口的时间宽度成反比。频谱受两个影响而变宽：频率变化率b和与1 ∕ a成正比的窗口宽度。如果窗口宽（小a），那么b ∕ a≫ 1，则整个窗口的线性调频频率范围大，频谱也宽。另一方面，较窄的窗口（较大的a）包含较小的频率范围，但窗口本身具有较宽的傅里叶变换，从而又导致了较宽的频谱。当b = a时，扩展最小化，𝜈中峰的宽度为2√a∕ 𝜋，u中峰的宽度为2 ∕ √𝜋a，这两个域之间的倒数关系很明显。有了这些示例，我们现在从更笼统的角度考虑短时傅立叶变换。对于函数f和窗口𝑤，定义了以下转换：

根据矩形和高斯窗口的经验，我们要求具有对称性，绝对和正方形可积且具有单位范数𝑤2= 1。

当窗口通过位置u平移时，短时傅立叶变换F（𝜈; u）基于输入信号f的一系列局部视图。 尽管函数𝑤（t-u）e-i2𝜋𝜈t不能构成正交基，但它具有内积形式。 不过，似乎我们仍应从这些局部视图中获取足够的信息来重构f，即反转变换。 此外，我们可能会询问变换是否节省能量（即是否存在Parseval公式）。 如果我们假设F（𝜈; u）∈L1，那么它相对于Four的傅里叶逆变换就是

然后，要摆脱窗口，将两边乘以𝑤（t − u）并相对于u进行积分：

因为“𝑤” 2 =1。要检查节能，请写

并假设我们可以重新排列积分的顺序：

这些计算对于f∈L2并不是令人满意的证明。 问题中概述了以下定理的更完整的证明。

定理5.18（短时傅立叶变换）。 设f∈L2。 设𝑤∈L1∩L2并以单位范数“ nor” 2 = 1且对称，even（t）=𝑤（-t）实数。 短时傅立叶变换

短时DFT

对于实际信号分析，短时傅立叶变换采用窗口DFT的形式。 代替高斯窗口，使用了有限长度的锥形窗口，例如汉明窗，𝑤[n] = 0.54-0.46 cos（2𝜋n ∕ L），n = 0，1，…，L ，。 在从n = m到n = m + L的加窗段上计算DFT：

随着变量r = n−m的变化，我们得到了一种看起来更像标准DFT的形式：

（这里使用的符号F [k; m]与第3章F [m; N']中用于零填充序列的DFT所使用的符号类似；文献中对于这两种格式都没有标准的符号，并且上下文应该清楚说明是什么变换。）在计算和显示幅度时，第二种形式的超前相位因子会丢失。频率仓的数量N至少等于窗口长度L +1。如果希望对频谱进行插值并增加数量，则窗口数据段可以零填充到大于L + 1的长度N。频率箱。通常，离散时间频率为𝜃 = 2𝜋k ∕ N，时间为t =nΔt或mΔt，其中Δt是采样间隔。图5.35说明了短时DFT在一对具有不同频率和不同时间开始点的正弦曲线上的应用。在方程式5.65中，窗坐标m定位窗的起点，与汉明和其他窗的标准命名法保持一致。在图中，此坐标已移动，因此m是窗口的中心。比较长度为32和96的窗口，较窄的窗口可以更清楚地分辨每个信号的开始，但是会产生较宽的频谱，从而难以解析间距很小的频率分量。较宽的窗口可提供良好的频率分辨率，但会掩盖起音。

像连续的短时傅立叶变换一样，短时DFT是可逆的并且节省能量。 为了节约能源，请考虑所有频点上的平方和：

然后，对m求和,

因为我们正在使用有限的数据记录并使用DFT，所以所有移位都是循环的，内部和是数据向量f的平方范数。 然后，如果窗口具有2范数单位，我们将恢复一个看起来像连续时间结果的公式：

对于反演，方程5.65的简单反DFT给出

作为m和n的函数，这是窗口数据段的序列或堆栈，每个窗口数据段均从n = m开始，以n = m + L结束，而对于所有其他n为零。 总结m，我们有

f的每个值，除f末尾的L内的值（0或M -1附近）之外，均乘以所有窗口值的总和。 如果我们要求对窗口进行规范化，以使该总和为“𝑤” 1 = 1，那么我们将得到一个反演结果：

末端的值通过1/3的和来缩放，并且可以通过适当地调整归一化来恢复。

Wavelet变换

短时傅立叶变换根据开窗正弦曲线（例如，高斯窗）分析信号

即使频率𝜈变化，窗口的宽度也与1 ∕ a成比例，它是固定的。 允许窗口的宽度随频率变化，以使窗口始终包含相同数量的周期，这将使时间本地化对于更快速变化的信号更加清晰。 这就引出了一个基于原型波形的扩展和平移来分析波形的想法，例如，

𝜓是原型。这些分析波形，对于适当选择ψ，被称为小波，以及函数f在这些术语的扩展，例如，

称为f的小波变换。 可以证明它具有正交膨胀的预期特性，包括可逆性和能量守恒。 这不是傅立叶变换，因为对频率的明确引用已经从视线中消失了。 而是，小波变换是比例，a和位置u的函数，为信号的特性提供了不同的“外观”。 而且，小波可以被构造为具有适合于特定问题的特定性质。 一种不限于正弦基函数。

小波是一个广泛的研究领域，具有广泛的应用范围，超出了本文的范围。19我们将限于一个示例性的例子。 最简单的小波族基于Haar函数：

选择标度a和平移u为二进位的，即基于2的幂，得出Haar小波族（图5.36）：

通过这种选择，小波在一个标度，j，k，𝜓j，k'⟩= 𝛿 [k-k']内，并且在整个标度上are正交，⟨𝜓j，k，𝜓j'，k⟩= are [j -j']。 函数f的扩展以单位宽度为𝜙0的矩形近似f开始，k = rect（x −（k + 1∕2））。20此近似表示为𝑣0：

接下来，将f投影到标度j = 0的Haar小波上，得出函数𝑤0：

{𝜓0，k}与{𝜙0，k}正交，因此𝑤0与to0正交，并且，0 +𝑤0之和在比例j = 1时近似于f。此近似值表示为𝑣1。 将f投影到尺度j = 1的小波上时，由于小波的正交性，函数𝑤1正交于𝑣0和orthogonal0，因此to1正交。 将𝑤1与𝑣1组合可以得到更精细的f近似值，𝑣2=𝑣0+𝑤0+𝑤1。 以更高的比例继续给出越来越精细的近似值：

𝑣0和𝑤j是各个尺度下f的相互正交视图。 𝑤j可以看作是尺度j的f的细节； 函数𝑣0是小波提取了所有比例信息后的余数。 可以看出，“”“ f-” J”” 2→0为J→∞，即集合{𝜙0，k，𝜓0，k，𝜓1，k，…}构成了L2的基础。

由{𝜓j，k}构成的所有函数𝑤j的集合包括L 2的子空间，我们将其表示为W j。 {𝜓j，k}是Wj的正交基础。 同样，由𝜙0，k构成的所有𝑣0的集合是L2的子空间，表示为V0，具有正交基数{𝜙0，k}。 这些子空间V0，W1，W2 ...相互正交。 因此，小波展开将L2划分为相互正交的子空间的直接和：

即，L2中的任何函数可以被写为每个比例尺上的函数之和，而连续的函数提供了越来越多的细节。

小波展开如图5.37所示。函数f由128个正弦曲线样本组成，其频率突然变化，并在其上叠加了一个窄的Sinc形脉冲。刻度j = 0到j = 7表示了近似值jj和细节函数jj。f中有两个突变特征，即x = 0.2附近的脉冲和x = 0.5处的跃变。这些都强烈地投射到更窄，更精细的尺度上，小波𝜙4，k，…，𝜙6，k并出现在相应的细节函数𝑣4，…，𝑣6和近似值𝑤4，…，𝑤6中。在较粗的范围内，这些功能会消失。当x> 0.5时，正弦波的高频部分也会强烈投射到较小尺度的小波上，并出现在较小尺度的细节和近似中。在较粗的范围内，此正弦曲线几乎不可见。另一方面，对于x <0.5，较低的频率部分会强烈投射到较粗糙的子波上，并出现在较粗糙的细节和近似值中。细节函数类似于傅立叶级数的项，其近似值类似于部分和。较小的音阶和较高的频率之间存在对应关系。但是由于小波基函数是局部的，与在整个实线上扩展的傅立叶基函数不同，小波展开更容易捕获和定位函数中的时间变化。由于这些原因，小波已经在各种领域中得到了广泛的应用。有兴趣的读者可以参考前述参考文献以进行进一步研究。